مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

دوازدهم
ریاضی

پیش‌آزمون شماره ۱
مردادماه ۱۴۰۳

پاسخنامه ریاضی ـ فیزیک

ردیف	نام درس	سرگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران
۱	حسابان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان		مهدیار شریف ـ نیکا موسوی
۲	هندسه	مهریار راشدی	علیرضا شیرازی ـ حسن محمدبیگی	داریوش امیری ـ مهدیار شریف
۳	گسسته	رضا توکلی	مصطفی دیداری ـ جمال صادقی	سینا پرهیزکار ـ مهدیار شریف
۴	فیزیک	جواد قزوینیان	نصرالله افاضل ـ محمدرضا خادمی	محمدرضا خادمی ـ امیرعلی قزوینیان
۵	شیمی	مسعود جعفری	محبوبه بیک‌محمدی ـ هادی مهدی‌زاده	محمد داودآبادی ـ کارو محمدی

گروه تایپ و ویراستاری (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی ـ امیرعلی الماسی ـ مبینا بهرامی ـ معین‌الدین تقی‌زاده ـ کبری سلیمانی ـ مهرداد شمسی ـ راضیه صالحی ـ انسیه مرزبان

برای اطلاع از اخبار مرکز سنجش آموزش مدارس برتر، به کانال تلگرام @taraaznet مراجعه نمایید.

حسابان

۱. گزینه ۲ صحیح است.

جملات مشترک خود جملات یک دنباله خطی هستند. اگر جملهٔ nام این دنباله را C_n در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} C_1 = 21 \\ \text{قدرنسبت} = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_n = 20n + 1 \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(2C_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow S_{12} = 6(42 + 11 \times 20) = 6 \times 262 = 1572$$

۲. گزینه ۴ صحیح است.

عدد بزرگ در هر دسته a_{n^2} است، یعنی عدد بزرگ در دستهٔ دهم a_{100} است و هر دسته $2n-1$ عضو دارد، پس دستهٔ دهم ۱۹ عضو با عضو بزرگ‌تر a_{100} دارد. لذا عدد وسط در دسته دهم a_{91} است. یعنی:

$$a_{91} = 3 \times 91 - 3 = 273 - 3 = 270$$

۳. گزینه ۴ صحیح است.

$$a \ , \ b \ , \ a+b+1 \ , \ ...$$

$$\text{حسابی} \Rightarrow 2b = a + a + b + 1 \Rightarrow b = 2a + 1$$

$$a+1 \ , \ b+1 \ , \ 3a+b \ , \ ...$$

$$\text{هندسی} \Rightarrow (b+1)^2 = (a+1)(3a+b)$$

$$\Rightarrow (2a+1+1)^2 = (a+1)(3a+2a+1)$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 8a + 4 = 5a^2 + 6a + 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow b = -1 & \times \\ a = 3 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$

دنبالهٔ هندسی: $4 \ , \ 8 \ , \ 16 \ , \ ...$

$$S_{10} = \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{12} - 4 \Rightarrow n = 4$$

۴. گزینه ۲ صحیح است.

$$a = 2 \Rightarrow a_n = 2n + b \ : \text{دنباله خطی}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_9} - \frac{1}{a_{10}}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+b} - \frac{1}{20+b}\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{(20+b)(b+2)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (b+20)(b+2) = -72$$

$$\Rightarrow b^2 + 22b + 40 = -72 \Rightarrow b^2 + 22b + 112 = 0$$

$$\Rightarrow (b+8)(b+14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -8 \\ b_2 = -14 \end{cases}$$

۵. گزینه ۳ صحیح است.

$$\alpha\beta = \frac{9\beta}{\alpha} \xrightarrow{\beta \neq 0} \alpha^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -3 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{6}{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \rightarrow \beta_1 + 3 = -2 \rightarrow \beta_1 = -5 \\ \alpha_2 = -3 \Rightarrow \beta_2 - 3 = 2 \Rightarrow \beta_2 = 5 \end{cases}$$

چون $\alpha < \beta$، پس $\alpha = -3$ و $\beta = 5$ قابل قبول است.

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 45$$

$$\Rightarrow f(\alpha + \beta) = f(2) = -12 + 12 + 45 = 45$$

۶. گزینه ۳ صحیح است.

ریشه‌ها را α و β فرض کنید:

$$\begin{cases} 2a = \alpha + \beta = \frac{8}{a} \Rightarrow a^2 = 4 \\ b^2 = \alpha\beta = \frac{b}{a} \xrightarrow{b \neq 0} a \times b = 1 \end{cases}$$

بنابراین $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و یا $a = -2$ و $b = -\frac{1}{2}$ است.

$$\begin{cases} 2x^2 - 8x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 15/5 \\ -2x^2 - 8x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 15/5 \end{cases}$$

۷. گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow a + b - 6 = 0 \Rightarrow a = 6 - b \\ -\frac{\Delta}{4a} = -8 \Rightarrow \frac{b^2 + 24a}{-4a} = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 = 8a \Rightarrow b^2 = 8(6 - b) \Rightarrow b^2 + 8b - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (b+12)(b-4) = 0 \xrightarrow{b>0} b = 4 \Rightarrow a = 2$$

محور تقارن: $x = -\frac{b}{2a} = -1$

۸. گزینه ۴ صحیح است.

از تلاقی سهمی با نیمساز ناحیهٔ چهارم یک معادله درجه دوم با ریشه مضاعف به دست می‌آید، زیرا نیمساز ناحیه چهارم بر نمودار مماس است. پس:

$$-3x^2 + (2m-1)x + m - 6 = -x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2mx - m + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 4m^2 - 12(6 - m) = 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -6 \end{cases}$$

چون بر نیمساز ناحیه چهارم مماس است، پس طول ریشهٔ مضاعف مثبت است:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{2m}{6} > 0 \Rightarrow m > 0 \Rightarrow m = 3$$

۹. گزینه ۴ صحیح است.

$$x = 2 \Rightarrow x^3 + mx - m = 8 + 2m - m = 0 \Rightarrow m = -8$$

$$x^3 - 8x + 8 = (x-2)(x^2 + 2x - 4)$$

پس α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2x - 4 = 0$ هستند:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = -4 \end{cases}$$

برای معادلهٔ جدید، S و P را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} S = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{2(-2)}{-4} = 1 \\ P = \frac{2}{\alpha} \times \frac{2}{\beta} = \frac{4}{\alpha\beta} = \frac{4}{-4} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

۱۰. گزینه ۴ صحیح است.

$$x^2+mx-n=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=-m\\ \alpha\beta=-n\end{cases}$$

$$x^2+2(m+1)x-2n=0 \Rightarrow \begin{cases}2\alpha-1+2\beta-1=-2m-2\\ (2\alpha-1)(2\beta-1)=-2n\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(-m)-2=-2m-2 \text{ بدیهی}\\ 4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=-2n\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(-n)-2(-m)+1=-2n \Rightarrow m-n=-\frac{1}{2}$$

۱۱. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا سهمی و خط را تلاقی می‌دهیم، پس داریم:

$$ax^2+8x-2a+2=0$$

$$\Rightarrow \Delta=64-4a(2-2a)=64+8a^2-8a$$

$$\Rightarrow \Delta=8a^2-8a+64=8(a^2-a+8)>0$$

Δ همواره مثبت است، یعنی خط همواره سهمی را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند. البته باید $a\neq 0$ تا f یک سهمی باشد.

۱۲. گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{4x-1}{2x+1}<2 \Rightarrow \frac{4x-1}{2x+1}-2<0 \Rightarrow \frac{-3}{2x+1}<0 \Rightarrow 2x+1>0$$

$$\Rightarrow x>-\frac{1}{2}$$

$$\frac{4x-1}{2x+1}>1 \Rightarrow \frac{4x-1}{2x+1}-1>0 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{2x+1}>0 \Rightarrow \begin{cases}x>1\\ x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس در کل $x>1$، یعنی جواب نامعادله $(1,+\infty)$ است.

۱۳. گزینه ۴ صحیح است.

تنها عددی که عبارت در آن تعریف شده است، $x=3$ است. $x=3$ را در معادله قرار دهیم صدق می‌کند، یعنی: $\alpha=3$.

$$\alpha^3-3\alpha=27-9=18$$

۱۴. گزینه ۲ صحیح است.

نسبت طلا به نقره ۱ به ۲ است. وقتی n گرم از سکه را حذف می‌کنیم، در واقع $\frac{n}{3}$ طلا و $\frac{2n}{3}$ نقره حذف کرده‌ایم و وقتی n گرم طلای خالص جایگزین می‌کنیم، داریم:

$$4-\frac{n}{3}+n=8 \Rightarrow n=6$$

۱۵. گزینه ۲ صحیح است.

نمودار تابع f در بازهٔ $(2,+\infty)$ خطی است و شکستگی ندارد. پس $a<2$ است و داریم:

$$x>2 \Rightarrow f(x)=2(x-a)+(x-2)$$

$$\Rightarrow f(x)=3x-2a-2$$

پس $m=3$ و $2m=-2a-2$ است و در نتیجه $a=-4$ است.

$$f(x)=2|x+4|+|x-2|$$

$$\Rightarrow f(m)=f(3)=15$$

۱۶. گزینه ۴ صحیح است.

اولاً $x=0$ جواب معادله است.

ثانیاً:

$$3ax+8=(x+2)^3$$

$$\Rightarrow 3ax+8=x^3+6x^2+12x+8$$

$$\Rightarrow 3ax=x^3+6x^2+12x \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ 3a=x^2+6x+12\end{cases}$$

قرار است معادله دارای ۲ ریشه باشد، پس معادلهٔ زیر می‌تواند ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Rightarrow x^2+6x+12-3a=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow 36-4(12-3a)=0$$

$$\Rightarrow 36-48+12a=0 \Rightarrow 12a=12 \Rightarrow a=1$$

در حالت $a=1$، یک ریشه $x=0$ و یک ریشهٔ -3 داریم. از طرفی هرگاه $a=4$، در این صورت $\begin{cases}x=0\\ x=-6\end{cases}$، ۲ ریشه هستند. پس کلاً ۲ مقدار برای a داریم. $a_1=4$ یا $a_2=1$. پس جمع مقادیر ممکن $a_1+a_2=5$ است.

۱۷. گزینه ۴ صحیح است.

$$-3<\frac{3x+n}{x-3}+1<3 \Rightarrow |\frac{4x+n-3}{x-3}|<3$$

$$\Rightarrow (4x+n-3)^2<9(x-3)^2$$

$$\Rightarrow (4x+n-3-3x+9)(4x+n-3+3x-9)<0$$

$$\Rightarrow (x+n+6)(7x+n-12)<0$$

باید m و $-2m$ ریشه‌های پرانتزهای بالا باشند:

$$1)\begin{cases}-n-6=m\\ \frac{-n+12}{7}=-2m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m+n=-6\\ 14m-n=-12\end{cases} \Rightarrow m=-\frac{6}{5} \text{ تناقض}$$

$$2)\begin{cases}-n-6=-2m\\ \frac{-n+12}{7}=m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2m-n=6\\ 7m+n=12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=2\\ n=-2\end{cases}$$

پس $m-n=4$ است.

۱۸. گزینه ۳ صحیح است.

$$x<0 \Rightarrow -2x+2-x=3 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \checkmark$$

$$0\leq x\leq 1 \Rightarrow -2x+2+x=3 \Rightarrow x=-1 \times$$

$$1<x \Rightarrow 2x-2+x=3 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \checkmark$$

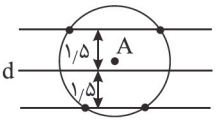
$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

هندسه

۱۹. گزینه ۳ صحیح است.

نقاطی که از A به فاصلهٔ ۴ هستند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ قرار دارند. نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ باشند، روی دو خط موازی با d قرار دارند. بسته به اینکه فاصلهٔ A تا d چقدر باشد تعداد جواب‌ها ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ نقطه است.

با توجه به شکل، دایره و دو خط موازی با d حداکثر چهار نقطهٔ مشترک دارند.



(هندسهٔ دهم، صفحهٔ ۱۰)

۲۰. گزینه ۱ صحیح است.

می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، داریم:

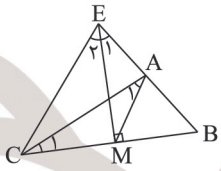
$$\begin{cases} \text{عمودمنصف } MH \Rightarrow MB = MC \Rightarrow M\hat{C}B = M\hat{B}C = \alpha \\ \text{نیمساز } BM \Rightarrow A\hat{B}M = M\hat{B}C = \alpha \end{cases} \Rightarrow A\hat{B}C = 2\alpha$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 3\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

بنابراین کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث، $\hat{C} = 20^\circ$ است.

(هندسهٔ دهم، صفحهٔ ۱۳)

۲۱. گزینه ۴ صحیح است.



$$\overset{\Delta}{EBM}: \hat{E}_1 + \hat{B} = 90^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ACB}: \hat{C}_1 + B = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E}_1$$ گزینهٔ ۲:

E روی عمودمنصف BC است، پس $\overset{\Delta}{CEB}$ متساوی‌الساقین است.

بنابراین:

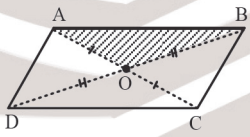
$E_2 = E_1$ گزینهٔ ۱:

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه از رأس قائم به وسط وتر وصل شود $AM = MC = MB$ است، پس $\overset{\Delta}{AMC}$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \hat{E}_1$. (گزینهٔ ۳)

گزینهٔ غلط، گزینهٔ ۴ است.

(هندسه دهم، صفحه ۱۴)

۲۲. گزینه ۳ صحیح است.



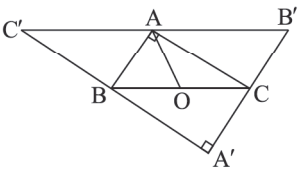
$$\begin{cases} AB \\ AC \\ BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \\ \frac{AC}{2}\ (\text{معلوم}) \\ \frac{BD}{2} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB}\ (\text{معلوم})$$

مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ با معلوم بودن سه ضلع آن، یک جواب دارد. اکنون اگر BO را در جهت O به اندازهٔ خودش و AO را در جهت O به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، نقاط D و C پیدا می‌شوند؛ بدین ترتیب متوازی‌الاضلاع رسم می‌شود که حداکثر یک جواب دارد.

(هندسهٔ دهم، صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۲۳. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به بیان سؤال شکل را رسم می‌کنیم، هر دو مثلث قائم‌الزاویه هستند و محل برخورد عمودمنصف آنها در وسط وتر است. محل همرسی عمودمنصف‌های ABC نقطهٔ O و محل همرسی عمودمنصف‌های مثلث $A'B'C'$، نقطهٔ A است.



$$\begin{cases} \text{متوازی‌الاضلاع } AB'CB \\ \text{متوازی‌الاضلاع } ACBC' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC = \frac{1}{2}B'C' \\ \overset{\Delta}{ABC}: AO = \frac{1}{2}BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{1}{4}B'C'$$

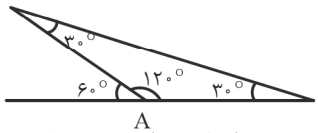
(هندسه دهم، صفحه ۱۶)

۲۴. گزینه ۱ صحیح است.

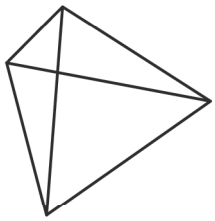
گزارهٔ الف نادرست است و مثال نقض آن مثلث متساوی‌الاضلاع است که هیچ‌کدام از زوایای آن بزرگ‌تر از 60° نیست.

گزارهٔ ب درست است؛ مانند مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۷، ۲۴ و ۲۵.

گزارهٔ ج نادرست است؛ مانند مثلث زیر که زاویهٔ خارجی A، از زاویهٔ داخلی آن بزرگ‌تر نیست.



گزارهٔ د نادرست است. چهارضلعی زیر، قطرهایش برابر هستند، ولی نه مستطیل است، نه مربع، نه ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین.

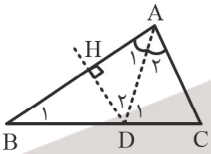


گزارهٔ ه نادرست است. محل برخورد نیمسازهای داخلی همواره درون مثلث است.

(هندسه دهم، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۷)

۲۵. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به شکل، $A_1 = B$ و $BD = AD$ می‌باشد. یعنی مثلث ABD متساوی‌الساقین است و DH، AB را نصف می‌کند.



$$\left.\begin{matrix} A\hat{D}B > \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\hat{D}B > \hat{A}_1$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه نابرابری در مثلث}} AB > BD$$

$$\Rightarrow AB > AD \ \checkmark$$

در مثلث قائم‌الزاویه AHD: $AD > AH = \frac{AB}{2}$ ✓

$$\left.\begin{matrix} \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{قضیه نابرابری}} AC > CD \ \checkmark$$

گزینه ۴ دلیل ندارد که همواره برقرار باشد.

(هندسه دهم، صفحهٔ ۲۷ تمرین ۶)

۲۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$ قطری $$B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$ اسکالر

$a + b + c = 12$: مجموع درایه‌های A

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ x & -3 & y \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

کافی است محاسبات را برای قطر اصلی ماتریس‌ها انجام دهیم.

$$\begin{cases} a+k-1=3 \\ b+k+3=3 \\ c+k-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+k=4 \\ b+k=0 \\ c+k=5 \end{cases}$$

هر سه رابطه را با هم جمع می‌کنیم.

$$\underbrace{(a+b+c)}_{12}+3k=9 \Rightarrow 3k=-3$$

مجموع درایه‌های ماتریس B برابر با -3 است.

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۲، ۱۵ و ۱۶)

۲۷. گزینه ۲ صحیح است.

ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد پس $(B\times C)\times A = B\times(C\times A)$ بنابراین:

$$(B\times C)\times A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow 3=\text{مجموع درایه‌ها}$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۲۰)

۲۸. گزینه ۱ صحیح است.

طبق ویژگی شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & x & x^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=6$$

$$\begin{bmatrix} 1+x & x^2+1 & x^3+1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=6 \Rightarrow 2+2x+x^2+1=6$$

$$\Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

بنابراین $\alpha=1$ و $\beta=-3$ یا $\alpha=-3$ و $\beta=1$ است که در این صورت:

$$\alpha=1\ ,\ \beta=-3 \Rightarrow 2\alpha-\beta=2+3=5$$

$$\alpha=-3\ ,\ \beta=1 \Rightarrow 2\alpha-\beta=-6-1=-7$$

(هندسهٔ دوازدهم، صفحهٔ ۱۷)

۲۹. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به مرتبهٔ ماتریس‌ها و تعاریف a_{ij} و b_{ij} داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

حالا باید درایهٔ واقع در سطر اول و ستون سوم $(AB)^2$ را به دست بیاوریم.

(ستون سوم AB)×(سطر اول AB) = درایه سطر اول و ستون سوم $(AB)^2$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}=19$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۸ و تمرین ۷ صفحهٔ ۲۱)

۳۰. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم.

$$A^3=A\times A\times A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

پس:

$$A^3=mA+nI \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}=m\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m+n & -m \\ 2m & m+n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m+n=-5 \Rightarrow n=-6 \\ -1=-m \Rightarrow m=1 \end{cases}$$

بنابراین $m-n=7$.

راه‌حل دوم: ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در تساوی $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I$ صدق می‌کند. پس:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=2A-3I \xrightarrow{A\times} A^3=2A^2-3A$$

$$\xrightarrow{A^2=2A-3I} A^3=2(2A-3I)-3A \Rightarrow A^3=A-6I$$

$$\xrightarrow{A^3=mA+nI} \begin{cases} m=1 \\ n=-6 \end{cases}$$

پس $m-n=7$.

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۱۸)

ریاضیات گسسته

۳۱. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به دامنه x عضو اعداد طبیعی است، پس $D=\{1,2,3,4,5,6\}$ و توان دوم همهٔ اعداد در دامنه، مثبت است.

(آمار و احتمال یازدهم، صفحهٔ ۱۱)

۳۲. گزینه ۳ صحیح است.

مثال نقض گزینه ۱، $n=11$ است که $2^{11}-1=2047$ بر ۲۳ بخش‌پذیراست.

مثال نقض گزینه ۲، $n=1$ است که $1^2-4+7=4$ عددی زوج است.

مثال نقض گزینه ۴، حاصل‌ضرب عدد گویای ۰ در عدد گنگ $\sqrt{2}$ برابر صفر است که عددی گنگ نیست.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۳۳. گزینه ۱ صحیح است.

$n=$ تعداد عضوهای A

$\Rightarrow$ تعداد عضوهای $P(A)=$ تعداد زیرمجموعه‌های $A=2^n$

$\Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه‌های $P(A)=2^{2^n}$

$$\Rightarrow \underbrace{2^{(2^n)^k}}_{2^{2^n}} - 2^{2^{n-1}} = 240 \xrightarrow{2^n=k} 2^k-2^{\frac{k}{2}}=240$$

$\xrightarrow{\frac{k}{2^2}=x} x^2-x-240=0 \Rightarrow x=16$

$x=16 \Rightarrow 2^{\frac{k}{2}}=16 \Rightarrow k=8 \Rightarrow 2^n=8 \Rightarrow n=3$

مجموعهٔ توانی A دارای $2^3=8$ عضو است که یکی از آنها برابر $\varnothing$ است. پس ۷ عضو غیر $\varnothing$ دارد.

(آمار و احتمال یازدهم، صفحهٔ ۱۷)

۳۴. گزینه ۱ صحیح است.

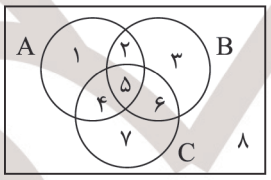
$r \Leftrightarrow T$ هم‌ارز r است. زیرا اگر r درست باشد، $T \Leftrightarrow T \equiv T$ و اگر r غلط باشد، $F \Leftrightarrow T \equiv F$ است. می‌دانیم $r \Rightarrow q \equiv \sim r \vee q$ و چون ارزش گزارهٔ q نادرست است، پس $r \Rightarrow q \equiv \sim r$.

بنابراین داریم: $(r \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \equiv r \Leftrightarrow \sim r$

r و $\sim r$ دارای ارزش متفاوت هستند. پس $r \Leftrightarrow \sim r$ همواره غلط است. از طرفی سؤال نقیض را می‌خواهد پس پاسخ برابر T است.

(آمار و احتمال یازدهم، صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۳۵. گزینه ۲ صحیح است.



از روش شماره‌گذاری استفاده می‌کنیم:

$A=\{1,2,4,5\}$

$B=\{2,3,5,6\}$

$C=\{4,5,6,7\}$

$C-B=\{4,7\} \Rightarrow (C-B)\cup A=\{1,2,4,5,7\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\Rightarrow \{1,2,4,5,7\}=\{1,2,3,4,5,6\}$

بنابراین ناحیه‌های $\{7\}$ و $\{3\}$ بایستی تهی باشند، یعنی B و C هر دو زیرمجموعهٔ A هستند. پس: $B\cup C \subseteq A$ و $(B\cup C)\cap A = B\cup C$

(آمار و احتمال یازدهم، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

۳۶. گزینه ۲ صحیح است.

$A=[-2,2] \Rightarrow D_f=[-2,2] \Rightarrow a=4$

$B=\mathbb{R} \xrightarrow{\Delta<0} b^2-4b<0 \Rightarrow b(b-4)<0 \Rightarrow 0<b<4$

$$a+b=\begin{cases}4+1=5\\4+2=6 \text{ (سه مقدار صحیح)}\\4+3=7\end{cases}$$

(آمار و احتمال یازدهم، صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۳۷. گزینه ۱ صحیح است.

برای آنکه $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج باشد باید $\frac{n(n+1)}{2}$ عددی زوج شود و برای اینکه $\frac{n(n+1)}{2}$ زوج شود باید n یا $n+1$ مضرب ۴ باشد.

پس دنبال اعدادی هستیم که یا مضرب ۴ باشند یا اگر با ۱ جمع شوند مضرب ۴ شوند.

مضارب ۴ عبارتند از:

$1368, 1372, 1376, \ldots, 1400$

اعدادی که با ۱ جمع شوند و مضرب ۴ شوند، عبارتند از:

$1367, 1371, 1375, \ldots, 1403$

تعداد اعداد گروه اول $\frac{1368-1000}{4}+1=9$ و گروه دوم $\frac{1400-1368}{4}+1=10$ است و تعداد کل اعداد $10+9=19$ است.

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۵)

۳۸. گزینه ۴ صحیح است.

با استفاده از برهان خلف می‌توان ثابت کرد که $(\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1})(\sqrt{a_2}-\sqrt{b_2})(\sqrt{a_3}-\sqrt{b_3})$ زوج است (پس مربع آن هم زوج است) چون اگر فرض کنیم فرد است، همهٔ عبارت‌های $\sqrt{a_i}-\sqrt{b_i}$ $(i=1,2,3)$ فرد هستند و جمع آنها نیز فرد است. ولی در این صورت داریم:

$\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1}+\sqrt{a_2}-\sqrt{b_2}+\sqrt{a_3}-\sqrt{b_3}$

$=(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3})-(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3})=0$ (تناقض)

اما با استفاده از مثال نقض $b_1=a_1=1$ و $b_2=a_2=4$ و $b_3=a_3=9$ می‌توان ثابت کرد که نتیجه‌گیری $((\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1})(\sqrt{a_2}-\sqrt{b_2})(\sqrt{a_3}-\sqrt{b_3}))^2$ فرد است، نادرست است، چون با جای‌گذاری حاصل زوج می‌شود.

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۶)

۳۹. گزینه ۴ صحیح است.

$a+b^2 \geq b\sqrt{a}+\sqrt{a}-b-1$

$\xleftarrow{\times 2} 2a+2b^2 \geq 2b\sqrt{a}+2\sqrt{a}-2b-2$

$\Leftrightarrow a+a+b^2+b^2-2b\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2b+1+1 \geq 0$

$\Rightarrow (\sqrt{a}-b)^2+(\sqrt{a}-1)^2+(b+1)^2 \geq 0$

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۸)

۴۰. گزینه ۱ صحیح است.

الف) درست، $n=0$ صفر وجود دارد که برای هر m طبیعی داریم:

$\sqrt{0+m}=\sqrt{0}+\sqrt{m}$

ب) درست، برای هر عدد حقیقی x که در نظر بگیریم عدد $y=0$ وجود دارد که $(x+0)^2=x^2+0^2$.

ج) درست، طبق تمرین کتاب درسی ثابت می‌شود که اگر a و b دو عدد ناصفر باشند تساوی $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ هیچ‌گاه درست نیست.

پس هر سه درست هستند.

(آمار و احتمال یازدهم، صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۴، ۵ و ۸)

فیزیک

۴۱. گزینه ۲ صحیح است.

گزاره ج نادرست است. ویژگی آزمون‌پذیری و اصلاح نظریه‌های فیزیکی نقطه قوت دانش فیزیک است.

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴۲. گزینه ۳ صحیح است.

مطابق با متن کتاب درسی، سال نوری مسافتی است که نور در مدت یک سال در خلأ می‌پیماید. گزینه ۳ نادرست آمده است.

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۷ تا ۹)

۴۳. گزینه ۲ صحیح است.

موارد (الف) و (د) نادرست و موارد (ب) و (ج) درست است.

الف) نادرست، هنگام مدل‌سازی اثرهای جزئی‌تر را می‌توان نادیده گرفت.

د) نادرست، هنگام هل دادن جسم معمولاً نیروی اصطکاک قابل صرف‌نظر کردن نیست و جزء اثرهای جزئی نیست.

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۵)

۴۴. گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا معادله را برحسب کمیت D مرتب می‌کنیم:

$$[D]=\frac{[A][B]}{[C]}\Rightarrow [D]=\frac{Pa\times\frac{m^3}{K}}{mol}$$

اکنون یکای فرعی Pa (پاسکال) را جایگزین می‌کنیم:

$$[D]=\frac{\frac{kg}{m.s^2}\times\frac{m^3}{K}}{mol}\Rightarrow [D]=\frac{kg.m^2}{mol.K.s^2}$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴۵. گزینه ۳ صحیح است.

$$m=۱۵۰\times۱۰^{-۳}\times۱۰^{-۳}=۱۵۰\times۱۰^{-۶}\Rightarrow m=۱/۵\times۱۰^{-۴}kg$$

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۱۳)

۴۶. گزینه ۳ صحیح است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) چون دقت دماسنج برابر $۰/۰۱C$ است.

۲) چون دقت تندی‌سنج $۵\frac{km}{h}$ است.

۴) هر قدر درجه‌بندی دستگاه اندازه‌گیری مدرج کمتر باشد، دقت دستگاه بیشتر است.

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴۷. گزینه ۴ صحیح است.

الف) یکای SI نیرو، نیوتون است.

ب) کولن جزو کمیت‌های فرعی است.

ج) درست است.

(فیزیک دهم، صفحهٔ ۷)

۴۸. گزینه ۲ صحیح است.

همان‌طور که یاد گرفتیم چگالی جزء ویژگی‌های فیزیکی ماده است و در دمای ثابت با تغییر طول و سطح تغییر نمی‌کند.

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۴۹. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا حجم کل را به کمک تغییر حجم آب درون استوانه محاسبه می‌کنیم:

$$V=A.h\Rightarrow V_{\text{کل فلز}}=(۱۲cm^2)(۲۰cm)=۲۴۰cm^3$$

اکنون حجم ماده مصرف شده برای ساخت قطعه فلز را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{\text{ماده}}=V_{\text{کل فلز}}-V_{\text{حفره}}=۲۴۰cm^3-۱۸۰cm^3=۶۰cm^3$$

با استفاده از رابطهٔ $\rho=\frac{m}{V}$، چگالی فلز به دست می‌آید.

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{۲۴۰g}{۶۰cm^3}=۴\frac{g}{cm^3}=۴۰۰۰\frac{g}{lit}=۴۰۰۰\frac{kg}{m^3}$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۵۰. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا حجم آلیاژ را از رابطهٔ $\rho_{\text{مخلوط}}=\rho_{\text{آلیاژ}}=\frac{m_A+m_B}{V_{\text{آلیاژ}}}$ به دست می‌آوریم:

$$۱۳/۵=\frac{\rho_A V_A+m_B}{V_{\text{آلیاژ}}}\Rightarrow ۱۳/۵=\frac{۶۰\times۷/۵+۹۰۰}{V_{\text{آلیاژ}}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{آلیاژ}}=۱۰۰cm^3$$

اکنون حجم دو ماده قبل از مخلوط کردن را محاسبه می‌کنیم:

$$V_B=\frac{m_B}{\rho_B}=\frac{۹۰۰g}{۲۵\frac{g}{cm^3}}=۳۶cm^3$$

$$\xrightarrow{V_A=۶۰cm^3} V_A+V_B=۹۶cm^3$$

$$\Rightarrow \text{تغییر حجم آلیاژ}=+۴cm^3$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۵۱. گزینه ۴ صحیح است.

گام اول: با استفاده از رابطهٔ $\rho=\frac{m}{V_{\text{واقعی}}}$، حجم واقعی (توپر) ماده را حساب می‌کنیم:

$$۱۰=\frac{۴۰۰}{V}\Rightarrow V=۴۰cm^3$$

گام دوم: حجم حفره را از رابطهٔ $V_{\text{واقعی}}=V_{\text{ظاهری}}-V_{\text{حفره}}$ حساب می‌کنیم:

$$۴۰=۵۰-V_{\text{حفره}}\Rightarrow V_{\text{حفره}}=۱۰cm^3$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۵۲. گزینه ۱ صحیح است.

در مسائل اجسام حفره‌دار ابتدا حجم واقعی ماده مصرف شده را از رابطهٔ $V=\frac{m}{\rho}$ به دست می‌آوریم و سپس به کمک روابط حجم‌های هندسی، حجم کل ماده و حفره را به دست می‌آوریم:

$$V_{\text{حفره}}=V_{\text{کل}}-V_{\text{ماده}}\Rightarrow V_{\text{حفره}}=۱۲۵cm^3-\frac{۱۰۸۰g}{۲۷\frac{g}{cm^3}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{حفره}}=۱۲۵cm^3-۴۰cm^3=۸۵cm^3$$

مقدار جرم مایعی که می‌توان به داخل حفره تزریق کرد، عبارت است از:

$$m=\rho.V\Rightarrow m=(۲\frac{g}{\cancel{cm^3}})\times(۸۵\cancel{cm^3})=۱۷۰g$$

(فیزیک دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۵۳. گزینه ۴ صحیح است.

چون نمودار $x-t$ صعودی است متحرک در جهت مثبت محور حرکت می‌کند و نتیجه می‌گیریم علامت سرعت مثبت است. $(v>0)$
اگر شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در حال کاهش باشد، تندی متحرک کم می‌شود و حرکت کندشونده است پس علامت شتاب مخالف سرعت است. $(a<0)$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶ تا ۱۲)

۵۴. گزینه ۱ صحیح است.

گام اول: از رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ در بازهٔ $t=0$ تا $t=8s$ استفاده می‌کنیم:

$$a_{av}=\frac{8-(-8)}{8}=2\frac{m}{s^2}$$

گام دوم: شیب خط مماس بر نمودار $v-t$، برابر شتاب در لحظهٔ مماس است و اندازهٔ آن را برای لحظهٔ $t=8s$ حساب می‌کنیم:

$$|a_{t=8s}|=|\frac{0-8}{11-8}|=\frac{8}{3}=\frac{m}{s^2}$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{|a_{t=8s}|}{a_{av}}=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۵۵. گزینه ۴ صحیح است.

از رابطهٔ $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ برای بازهٔ زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=4s$ استفاده می‌کنیم:

$$t_1=2s\Rightarrow x_1=-30m$$
$$t_2=4s\Rightarrow x_2=-30m$$
$$v_{av}=\frac{-30-(-30)}{4-2}=0$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳ تا ۹)

۵۶. گزینه ۴ صحیح است.

از رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. سه ثانیهٔ دوم مربوط به بازهٔ $t_1=3s$ تا $t_2=6s$ می‌شود.

$$a_{av}=\frac{(3\times6^2+5\times6)-(3\times3^2+5\times3)}{6-3}=\frac{138-42}{3}=32\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۵۷. گزینه ۳ صحیح است.

از رابطهٔ $\Delta x=v\Delta t$ استفاده می‌کنیم و برای دو قسمت AB و AC آن را می‌نویسیم.

$$\Delta x_{AB}=v\times\Delta t_{AB}\Rightarrow 15=v\times5$$
$$\Delta x_{AC}=v\times\Delta t_{AC}\Rightarrow 45=v\times\Delta t_{AC}$$

از تقسیم طرفین دو رابطه فوق بر هم داریم:

$$\frac{45}{15}=\frac{\Delta t_{AC}}{5}\Rightarrow\Delta t_{AC}=15s$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۵۸. گزینه ۱ صحیح است.

گام اول: از معادلهٔ $x=vt+x_0$ برای دو لحظهٔ $t=2s$ و $t=7s$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$t=2s\Rightarrow 10=2v+x_0\quad(1)$$
$$t=7s\Rightarrow -15=7v+x_0\quad(2)$$

گام دوم: برای حل دستگاه فوق طرفین رابطه بالایی را در -1 ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}-10=-2v-x_0\\-15=7v+x_0\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع طرفین معادله‌ها}}-25=5v$$

$$\Rightarrow v=-5\frac{m}{s}$$

با قرار دادن $v=-5$ در رابطهٔ (۱) داریم:

$$10=2\times-5+x_0\Rightarrow x_0=20m$$

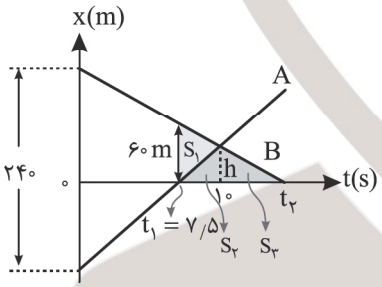
گام سوم: معادله حرکت را می‌نویسیم:

$$x=-5t+20$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۵۹. گزینه ۳ صحیح است.

گام اول: در بازهٔ t_1 تا t_2 مکان هر دو متحرک مثبت و هم‌علامت است.



از تشابه مثلث S_1 با مثلث بزرگ‌تر که آن را در بر گرفته است، t_1 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\overset{4}{\cancel{24}0}}{10}=\frac{60}{10-t_1}$$

$$40-4t_1=10\Rightarrow t_1=7/5s$$

گام دوم: در مثلث S_3 از شیب خط B استفاده کرده و اندازهٔ سرعت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$|v_B|=\frac{h}{t_2-10}\Rightarrow$$

و در مثلث S_2 نیز برای شیب خط A داریم:

$$|\text{شیب A}|=|v_A|=\frac{h}{10-7/5}$$

گام سوم: چون $|v_A|=2|v_B|$ است، می‌توان نوشت:

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\frac{h}{10-7/5}}{\frac{h}{t_2-10}}\Rightarrow 2=\frac{t_2-10}{10-7/5}\Rightarrow t_2=15s$$

گام چهارم: مدت‌زمان مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t=15-7/5=7/5s$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۶۰. گزینه ۲ صحیح است.

گام اول: از رابطهٔ کلی سرعت متوسط برای چند مرحله استفاده می‌کنیم و مدت‌زمان مرحلهٔ سوم حرکت را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}\xrightarrow{\Delta x=v\Delta t}2=\frac{4\times10+50-30}{10+\frac{50}{5}+\Delta t_1}$$

$$\Delta t_1=10\,s$$

گام دوم: اکنون تندی متوسط متحرک را در این مدت‌زمان حساب می‌کنیم:

$$S_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{30}{10}=3\,\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳ تا ۹)

۶۱. گزینه ۲ صحیح است.

هنگامی که علاوه بر اندازهٔ سرعت، جهت آن نیز ثابت باشد، می‌گوییم متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند و دارای حرکت یکنواخت است. در این حرکت اندازهٔ سرعت متوسط و لحظه‌ای یکسان است.

$$v=v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-6}{2}=-3\,\frac{m}{s}$$

$$x=vt+x_0\xrightarrow[t=2s\ ,\ x=0]{v=-3}0=-3\times2+x_0\Rightarrow x_0=6m$$

$$x=-3t+6$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۶۲. گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم خط مماس بر نمودار $x-t$ معرف سرعت لحظه‌ای است. در لحظهٔ $t=3s$، خط مماس افقی و دارای شیب صفر است، پس داریم: $v_3=0$

شیب خط مماس در لحظهٔ $t=6s$ عبارت است از:

$$\frac{x_6-x_0}{6-0}=\frac{20-(-10)}{6}=5\Rightarrow v_6=5\,\frac{m}{s}$$

از رابطهٔ شتاب متوسط داریم:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{v_6-v_3}{6-3}=\frac{5-0}{3}=(\frac{5}{3}\,\frac{m}{s^2})\vec{i}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۹ و ۱۰)

۶۳. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا به کمک شیب که از روی نمودار مکان ـ زمان متحرک به دست می‌آید، معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$v_A=\frac{700m}{50s}=14\,\frac{m}{s}\ ,\ v_B=\frac{550m}{50s}=11\,\frac{m}{s}$$

$$\left.\begin{aligned}x_A=v_At+x_{0A}\Rightarrow x_A=14t\\ x_B=v_Bt+x_{0B}\Rightarrow x_B=11t+50\end{aligned}\right\}\Rightarrow|x_A-x_B|\le20$$

$$\Rightarrow|14t-(11t+50)|\le20\Rightarrow|3t-50|\le20$$

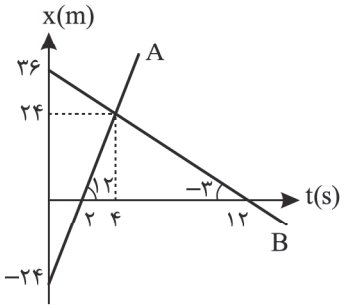
$$\Rightarrow-20\le3t-50\le20\Rightarrow30\le3t\le70\Rightarrow10\le t\le\frac{70}{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_1=10s\\ t_2=\frac{70}{3}s\end{cases}\Rightarrow t_2-t_1=\frac{70}{3}-10=\frac{40}{3}s$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۶۴. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان هر یک از این دو متحرک را می‌نویسیم:



$$v_B=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-36m}{12s}=-3\,\frac{m}{s}\Rightarrow x_B=v_Bt+x_{0B}$$

$$\Rightarrow x_B=-3t+36$$

$$v_A=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{24m}{2s}=12\,\frac{m}{s}\Rightarrow x_A=v_At+x_{0A}$$

$$\Rightarrow x_A=12t-24$$

$$\left.\begin{aligned}t=3s\Rightarrow x_A=12m\\ t=3s\Rightarrow x_B=27m\end{aligned}\right\}\Rightarrow|x_B-x_A|=27-12=15m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

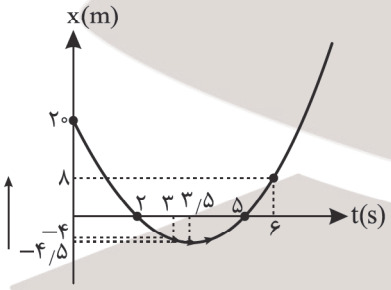
۶۵. گزینه ۴ صحیح است.

چون می‌خواهیم مسافت را به دست آوریم، باید مقدار طول مسیر طی شده را پیدا می‌کنیم که برای این امر نیازمند رسم دقیق نمودار مکان ـ زمان هستیم.

$$x=2t^2-14t+20=0\Rightarrow2(t^2-7t+10)=0$$

$$\Rightarrow2(t-2)(t-5)=0\Rightarrow t=2s\ ,\ t=5s$$

در قسمت بعدی از روی نمودار $x-t$ مسافت پیموده شده را دقیق به دست می‌آوریم:



$$x(3)=2(3)^2-14\times(3)+20=-4m$$

$$x(3/5)=2(3/5)^2-14(3/5)+20=-4/5m$$

$$x(6)=2(6)^2-14\times(6)+20=8m$$

$$l_{(3\ ,\ 6)}=0/5m+12/5m=13m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳ تا ۹)

۶۶. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا شیب خط D را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{شیب خط D}=\frac{0-20}{12-8}=\frac{-20}{4}=-5$$

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان بیانگر و معرف شتاب لحظه‌ای است. پس داریم:

$$a_{t=8s}=-5\,\frac{m}{s^2}$$

از فرض سؤال داریم:

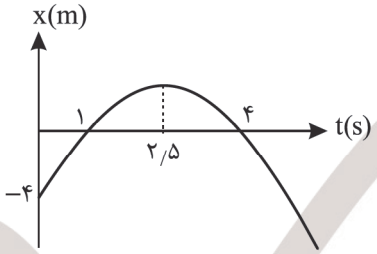
$$\Rightarrow a_{t=8} = a_{av_{(2s\ ,\ 16s)}} \Rightarrow -5 = \frac{v_{16} - v_2}{16-2}$$

$$\Rightarrow v_{16} - 5 = -70 \Rightarrow v_{16} = -65\frac{m}{s} \Rightarrow S_{16} = |v_{16}| = 65\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۶۷. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا به کمک قاعدهٔ رسم سهمی، معادلهٔ مکان ـ زمان که یک نمودار سهمی است را رسم می‌کنیم.



$$-t^2 + 5t - 4 = 0 \Rightarrow -(t-4)(t-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 1s\ ,\ t_2 = 4s$$

با تحلیل نمودار مکان ـ زمان درمی‌یابیم که بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 4s$ بردار جابه‌جایی هم‌جهت با محور x است.

الف) نادرست

$$v_{av} = \frac{0-(-4)}{4} = 1\frac{m}{s} \Rightarrow v_{av} > 0$$

ب) نادرست، ابتدا کندشونده و سپس تندشونده

ج) نادرست، جهت حرکت یک مرتبه تغییر کرده است، در لحظهٔ $t = 2/5s$.

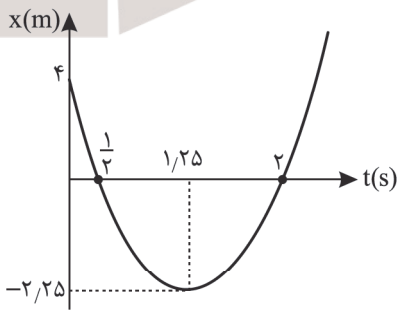
د) نادرست، با توجه به اینکه در این بازه، جهت حرکت عوض شده است، پس مسافت بیش از جابه‌جایی است.

ه) درست، $\Delta\vec{x} = (+4m)\vec{i}$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳ تا ۹)

۶۸. گزینه ۳ صحیح است.

چون صحبت از تندی متوسط به میان آمده است، می‌بایست مسیر پیموده‌شده را توسط متحرک پیدا کنیم که این امر نیازمند ترسیم معادلهٔ مکان ـ زمان می‌باشد.



$$x(t) = 0 \Rightarrow 4t^2 - 10t + 4 = 0 \Rightarrow 2(2t-1)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}s\ ,\ t_2 = 2s$$

$$t_{\text{رأس}} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 4(\frac{5}{4})^2 - 10(\frac{5}{4}) + 4 = -2/25m$$

چون متحرک در بازهٔ $(0\ ,\ 2s)$ دچار تغییر جهت شده است، برای طول مسیر طی‌شده می‌نویسیم:

$$L = 6/25 + 2/25 = 8/5m$$

در گام بعد، سراغ جابه‌جایی می‌رویم:

$$|d| = |\Delta x| = |x_2 - x_0| = |-4m| = 4m$$

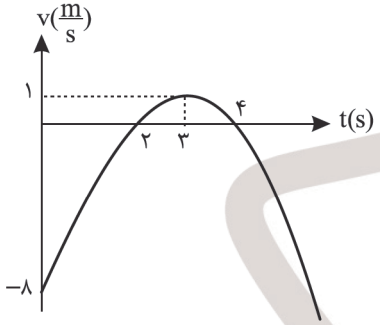
$$\frac{S_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{1}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{1}{\Delta x} = \frac{8/5}{4} = 2/125$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳ تا ۹)

۶۹. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا باید نمودار سرعت ـ زمان را رسم کنیم.

$$v(t) = -(t-2)(t-4)$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنید در بازهٔ $(3s\ ,\ 4s)$ $v > 0$، یعنی در جهت محور x و مقدار آن در حال کاهش است.

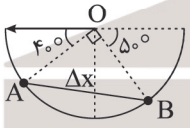
پس از یافتن بازهٔ مورد نظر اکنون از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ بزرگی شتاب متوسط را پیدا می‌کنیم:

$$a_{av} = \frac{v_4 - v_3}{4-3} = \frac{0-1}{1} = -1\frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{av}| = 1\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۷۰. گزینه ۴ صحیح است.

برای محاسبهٔ جابه‌جایی باید طول وتر AB که روبه‌روی کمان ۹۰ درجه قرار گرفته است را به دست بیاوریم:



$$\Delta x = AB = R\sqrt{2}$$

اما مسافت طی‌شده در این مسیر طول کمان AB می‌باشد.

$$l = \frac{1}{4}(2\pi R) = \frac{\pi R}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{l} = \frac{\sqrt{2}R}{\frac{\pi R}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۲ و ۳)

شیمی

۷۱. گزینه ۲ صحیح است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

۱) گرافیت دگرشکلی از کربن است که به سرب مداد معروف است.

۲) $0/36gC_{\text{گرافیت}} \times \frac{1molC_{\text{گرافیت}}}{12gC_{\text{گرافیت}}} = 0/03molC$

۳) رنگ حاصل از اعمال جریان متناوب به خیارشور: زرد.
۴) H، F، O، N، Cl، Br و I در دما و فشار اتاق به شکل ماده مولکولی با مولکول‌های دو اتمی وجود دارند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۷۲. گزینه ۴ صحیح است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

هنگامی که به اتم‌های گازی یک عنصر، با تابش نور یا گرم کردن، انرژی داده شود، الکترون‌ها با جذب انرژی معین از لایه‌ای به لایهٔ دیگر منتقل می‌شوند.

تابش نور یا گرم کردن ← جذب انرژی ← انتقال الکترون به لایهٔ بالاتر

طیف نشری خطی لیتیم شامل ۴ خط رنگی به رنگ‌های نیلی، آبی، زرد و قرمز است که مقایسه انرژی آنها به صورت قرمز < زرد < آبی < نیلی می‌باشد.

مدل بور تنها توانایی توجیه طیف نشری خطی هیدروژن را داشت.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۷۳. گزینه ۲ صحیح است.

مس و جیوه در آن وجود دارد.

(شیمی دهم، صفحهٔ ۴۵)

۷۴. گزینه ۴ صحیح است.

اگر آرایش الکترونی گونه‌ای به $2s^2 2p^6$ ختم شود، آن گونه می‌تواند گاز نجیب ($_{10}Ne$)، کاتیون پایدار (مثل: $_{12}Mg^{2+}$) یا آنیون پایدار (مثل $_{8}O^{2-}$) باشد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۲۷ تا ۴۱)

۷۵. گزینه ۳ صحیح است.

بررسی گزینهٔ نادرست:

دانشمندان با استفاده از طیف‌سنج، پرتوهای گسیل شده از سیارات را مورد بررسی قرار می‌دهند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۹ تا ۴۱)

۷۶. گزینه ۲ صحیح است.

عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) نماد تکنسیم ($^{99}_{43}Tc$) می‌باشد.

پ) یون یدید با یون حاوی تکنسیم اندازه مشابهی دارد.

(شیمی دهم، صفحهٔ ۷)

۷۷. گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{M} = M_1 + (M_2 - M_1)\times\frac{F_2}{100} \Rightarrow 47/6 = 46 + (2)\times\frac{F_2}{100}$$

$$\rightarrow 1/6 = \frac{2F_2}{100} \rightarrow 2F_2 = 160 \rightarrow F_2 = \%80\ (^{48}B \text{ فراوانی})$$

$$?\,atom\ ^{48}B = 20\,gB\times\frac{1\,amu}{1/66\times10^{-24}\,g}\times\frac{1\,atomB}{47/6\,amu}$$

$$\times\frac{80\,atom\ ^{48}B}{100\,atomB} \simeq 2\times10^{24}\,atom\ ^{48}B$$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۱۵)

۷۸. گزینه ۱ صحیح است.

ایزوتوپ‌ها دارای عدد اتمی یکسان بوده و در یک خانه از جدول تناوبی جای دارند.

$$^{27}X: \begin{cases} n+p=27 \\ n-p=3 \end{cases} \Rightarrow 2n-30 \Rightarrow n-15 \Rightarrow p-12$$

پس این اتم با اتم‌های $^{26}_{12}C$ و $^{25}_{12}A$ در یک خانه از جدول تناوبی جای دارد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵ و ۶)

۷۹. گزینه ۱ صحیح است.

همهٔ عبارت‌های بیان شده به‌جز عبارت پنجم صحیح‌اند.

عبارت پنجم: در بین ۸ عنصر فراوان سیارهٔ مشتری، عنصر فلزی وجود ندارد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۲ تا ۸)

۸۰. گزینه ۳ صحیح است.

عبارت‌های (آ) و (ت) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) طی مهبانگ انرژی عظیمی آزاد شده است.

ت) در غنی‌سازی ایزوتوپی مقدار یک ایزوتوپ را در مخلوط ایزوتوپ‌های آن افزایش می‌دهند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۲ تا ۸)

۸۱. گزینه ۴ صحیح است.

$$18\,gH_2O\times\frac{1\,mol\,H_2O}{18\,gH_2O}\times\frac{3\,mol\,\text{اتم}}{1\,mol\,H_2O}\times\frac{N_A\,\text{اتم}}{1\,mol\,\text{اتم}} = 3N_A\,\text{اتم}$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۲۰)

۸۲. گزینه ۱ صحیح است.

$$X \rightarrow \begin{cases} A_1(\text{عدد جرمی}) \\ Z_1(\text{عدد اتمی}) \end{cases}, Y \rightarrow \begin{cases} A_2(\text{عدد جرمی}) \\ Z_2(\text{عدد اتمی}) \end{cases}$$

برابری نوترون‌ها: $54 - Z_2 = A_1 - Z_1$

برابری الکترون‌ها: $Z_2 + 1 = Z_1 - 2 \Rightarrow Z_2 - Z_1 = -3 \quad (I)$

$$\Rightarrow 54 - A_1 = Z_2 - Z_1 \xrightarrow{(I)} 54 - A_1 = -3$$

$$\Rightarrow A_1 = 57$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۸۳. گزینه ۲ صحیح است.

نوترون‌های A: $3n + 2 - (m+1) = 3n + 2 - m - 1 = 3n - m + 1$

الکترون‌های B: $n + 3$

$$3n - m + 1 = 2(n+3) \Rightarrow n - m = 5$$

$$^{9(n-m)-1}_{2(n-m)+1}C^+ \Rightarrow {}^{44}_{11}C^+ \Rightarrow \begin{cases} e\,\text{تعداد} = 10 \\ \text{جرم مولی} \simeq 44\,g \end{cases}$$

$$?\,gC^+ = 3/01\times10^{23}\,e^- \times\frac{1\,mole^-}{6/02\times10^{23}\,e^-}\times\frac{1\,mol\,C^+}{10\,mole^-}\times\frac{44\,gC^+}{1\,molC^+}$$

$$= 2/2\,gC^+$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵ و ۱۷ تا ۱۹)

۸۴. گزینه ۳ صحیح است.

$$\underbrace{n+p}_{۷۲}+e=۹۴\Rightarrow ۷۲+e=۹۴\rightarrow e=۲۲$$

$$۱۴۴gX^{۲+}\times\frac{۱molX^{۲+}}{۷۲gX^{۲+}}\times\frac{۲۲mole^-}{۱molX^{۲+}}\times\frac{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-}{۱mole^-}$$

$$=۲۶۴/۸۸\times۱۰^{۲۳}e^-$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۸۵. گزینه ۴ صحیح است.

همهٔ عبارت‌های بیان شده صحیح‌اند و عبارت نادرستی وجود ندارد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

۸۶. گزینه ۲ صحیح است.

عبارت‌های (ب) و (پ) صحیح‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

آ) نور نشر شده از انتقال A بنفش رنگ است.

ت) انرژی نور نشر شده از انتقال B (نیلی) بیشتر از انتقال D (آبی) است.

(شیمی دهم، صفحهٔ ۲۷)

۸۷. گزینه ۲ صحیح است.

برای اینکه بتوانیم جرم یک ماده را توسط ترازو بسنجیم، باید جرم ماده از دقت اندازه‌گیری ترازو بیشتر باشد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۰)

۸۸. گزینه ۴ صحیح است.

ایزوتوپ‌ها در خواص شیمیایی، عدد اتمی، شماره گروه و آرایش الکترونی شباهت دارند.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵ و ۶)

۸۹. گزینه ۴ صحیح است.

$$۵۴۰gN_۲O_x\times\frac{۱molN_۲O_x}{(۲۸+۱۶x)gN_۲O_x}\times\frac{x\,molO}{۱molN_۲O_x}$$

$$\times\frac{۱۶g}{۱molO}=۴۰۰g\Rightarrow x=۵$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۹۰. گزینه ۲ صحیح است.

دقت شود که مولکول پایدار مولکولی است که از اتم‌های پایدار تشکیل شده باشد.

$$\text{پایدارهای S}\begin{cases}^{۳۳}S\\^{۳۴}S\\^{۳۶}S\end{cases}\quad،\quad\text{پایدارهای H}\begin{cases}^{۱}_{۱}H\\^{۲}_{۱}H\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{سنگین‌ترین}:{}^{۲}H+{}^{۲}H+{}^{۳۶}S\Rightarrow\text{جرم مولی}=۴۰amu\\\text{سبک‌ترین}:{}^{۱}H+{}^{۱}H+{}^{۳۳}S\Rightarrow\text{جرم مولی}=۳۵amu\end{cases}$$

$$\text{اختلاف جرم مولی}=۵amu$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵ و ۶)

۹۱. گزینه ۲ صحیح است.

$$F_۱+F_۲+F_۳=۱۰۰$$

$$\left.\begin{array}{ll}I) & F_۳=۱۰۰-(F_۱+F_۲)\\II) & F_۳=\frac{۱}{۴}(F_۱+F_۲)\\III) & F_۳=\frac{۱}{۳}F_۱\end{array}\right\}\xrightarrow{II\text{ و }I}\frac{۱}{۴}(F_۱+F_۲)=۱۰۰-(F_۱+F_۲)$$

$$۴\times\text{دو طرف}\Rightarrow F_۱+F_۲=۴۰۰-۴(F_۱+F_۲)$$

$$\Rightarrow ۵(F_۱+F_۲)=۴۰۰\Rightarrow F_۱+F_۲=٪۸۰\Rightarrow F_۳=٪۲۰$$

$$F_۳=\frac{۱}{۳}F_۱\Rightarrow ۲۰=\frac{۱}{۳}F_۱\Rightarrow\begin{array}{l}F_۱=٪۶۰\\F_۲=٪۲۰\end{array}$$

$$\bar{M}=۱۱+(۱\times\frac{۲۰}{۱۰۰})+(۲\times\frac{۲۰}{۱۰۰})=۱۱/۶amu$$

(شیمی دهم، صفحهٔ ۱۵)

۹۲. گزینه ۴ صحیح است.

عبارت‌های (آ) و (ب) درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

پ) زیرلایهٔ 4d زودتر از 5P پر می‌شود.

ت) با توجه به اینکه $A^{۲-}$ به $۳p^۶$ ختم شده پس عدد اتمی A برابر ۱۶ بوده و مربوط به گروه شانزدهم جدول تناوبی است.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۴۱)

۹۳. گزینه ۳ صحیح است.

تعداد الکترون‌ها در $^{۵۴}_{۳۳}X^{۳-}$ برابر با ۳۶ است در حالی که در دورهٔ چهارم جدول تناوبی ۱۸ عنصر وجود دارد.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۱۰ تا ۴۱)

۹۴. گزینه ۴ صحیح است.

در لایهٔ سوم الکترونی اتم عنصرها، سه مقدار برای عدد کوانتومی فرعی عنصرها وجود دارد و حداکثر تعداد الکترون‌ها در لایهٔ چهارم برابر با ۳۲ است.

$$\left.\begin{array}{l}a=۳\\b=۳۲\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a+b}{۷}=\frac{۳+۳۲}{۷}=\frac{۳۵}{۷}=۵$$

(شیمی دهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۴۱)

۹۵. گزینه ۳ صحیح است.

درصد فراوانی ایزوتوپ $^{۲۳۵}_{۹۲}U$ در طبیعت، کمتر از ۰/۷ درصد است.

(شیمی دهم، صفحه‌های ۵ تا ۸ و ۱۵)